

출제자: 13번의 원본은 다음과 같습니다.

14. 삼차함수 $f(x)$ 에 대하여 함수

$$g(x) = \frac{f(x)}{(x-4)f(x)-3}$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

$$\text{함수 } h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x-4} & (x < 4) \\ 0 & (x = 4) \\ g(x-4) & (x > 4) \end{cases} \text{ 는 } x=4 \text{에서 연속이다.}$$

실수 전체의 집합에서 연속인 모든 함수 $g(x)$ 에 대하여 $g(3)$ 의 값의 범위는? [4점]

- ① $g(3) < \frac{1}{8}$ ② $g(3) < \frac{1}{4}$ ③ $0 < g(3) < \frac{1}{8}$
④ $0 < g(3) < \frac{1}{4}$ ⑤ $\frac{1}{8} < g(3) < \frac{1}{4}$

올해 13번에 주어진 설명들을 지우고 이와 같은 형태로 주어졌어도 풀 수 있어야 합니다. 이 문제를 같이 한 번 살펴봅시다.

우선 선택지부터 부등식으로 되어 있는 점이 최근 기출문제들과 비교해서 이질적으로 느껴질 수 있습니다.

‘ $g(3)$ 의 값은?’ 또는 ‘ $g(3)$ 의 값의 합은?’

과 같은 발문은 익숙한데, 모두 $g(3)$ 이 이산적인 값을 가질 때입니다.

그러나 $g(3)$ 의 값이 몇 가지 값으로 정해지지 않고 어떤 범위에서 모든 값을 연속적으로 가질 수 있는 경우가 있는데, 이는 보통 조건으로 제시할 뿐, 그 범위를 구해서 답으로 쓰라고는 했던 기출문제는 별로 없었습니다.

출제자: 옛날 기출 중에 찾아보면 다음과 같습니다.

7. 삼차함수 $f(x) = x(x-1)(ax+1)$ 의 그래프 위의 점

$P(1, 0)$ 을 접점으로 하는 접선을 l 이라 하자. 직선 l 에 수직이고 점 P 를 지나는 직선이 곡선 $y=f(x)$ 와 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 a 의 값의 범위는? [3점]

- ① $-1 < a < -\frac{1}{3}$ 또는 $0 < a < 1$
- ② $-\frac{1}{3} < a < 0$ 또는 $0 < a < 1$
- ③ $-1 < a < 0$ 또는 $0 < a < \frac{1}{3}$
- ④ $-1 < a < 0$ 또는 $\frac{1}{3} < a < 1$
- ⑤ $-2 < a < -\frac{1}{3}$ 또는 $\frac{1}{3} < a < 2$

<2009학년도 6월 평가원 가형>

그렇지만 이러한 묻는 방식은 근본적으로 ' $g(3)$ 의 값의 합은?'과 다르지 않습니다.

결국 $g(3)$ 의 값이 여러개이고, 이들을 모두 묻겠다는 것이니까요.

또한 이 문제를 처음 구상하면서 다음 기출문제를 참고하였는데요.

28. 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $\frac{x}{f(x)}$ 는 $x=1, x=2$ 에서 불연속이다.

(나) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2} = 4$

$f(4)$ 의 값을 구하시오. [4점]

<2019학년도 6월 평가원 나형>

함수 $\frac{x}{f(x)}$ 가 $x=1, x=2$ 에서 불연속이라는 것은 분모가 0이 되면서 함숫값이

정의되지 않는다는 뜻입니다. 즉, $f(1)=f(2)=0$ 이므로 상수 a 에 대하여 이차함수 $f(x)$ 를 $f(x)=a(x-1)(x-2)$ 로 놓을 수 있습니다.

출제자: 이와 같은 내용은 13번의 <보기>에 주어진 ㄱ, ㄴ, ㄷ을 해석하는 과정에서 모두 사용되죠. 그런데 그에 앞서 함수

$$h(x) = \begin{cases} \frac{g(x)}{x-4} & (x < 4) \\ 0 & (x = 4) \\ g(x-4) & (x > 4) \end{cases} \quad \cdots \textcircled{7}$$

가 $x=4$ 에서 연속이 되기 위한 조건을 생각해야 합니다. 그 과정에서 함수 $g(x)$ 가 갖는 인수 $x-4$ 의 개수를 결정해야 하는데, 이는 어떻게 접근하면 좋을까요?

검토자: 함수 $h(x)$ 의 $x=4$ 에서의 우극한이 0으로 수렴해야하므로

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4+} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 4+} g(x-4) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} g(x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0+} \frac{f(x)}{(x-4)f(x)-3} \\ &= 0 \end{aligned}$$

에서 $f(0)=0$ 입니다.

한편 함수 $h(x)$ 의 $x=4$ 에서의 좌극한이 0으로 수렴하는 상황인

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4-} h(x) &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{g(x)}{x-4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4-} \frac{f(x)}{(x-4)\{(x-4)f(x)-3\}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

에서 $f(4)=0$ 이라는 조건을 얻을 수 있지만, 이보다 더 자세한 해석이 필요합니다.

분모에 인수 $x-4$ 를 상쇄하고도 분자에 인수 $x-4$ 가 남아있어야 극한값이 0이

되므로 정확히는 함수 $f(x)$ 가 $(x-4)^2$ 을 인수로 갖는다고 이야기할 수 있습니다.

위의 과정을 조금 일반화하여 두 다항함수 $F(x)$, $G(x)$ 에 대하여 극한

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{F(x)}{G(x)} \quad \cdots \textcircled{8}$$

가 언제 수렴하고 발산하는 지 알아보시다.

검토자: 이때 x 가 a 로 수렴하므로 분자, 분모가 각각 가지는 인수 $x-a$ 의 개수가

중요합니다. 따라서 음이 아닌 두 정수 m, n 에 대하여 두 함수 $F(x), G(x)$ 를

$$F(x) = (x-a)^m f_1(x) \ (f_1(a) \neq 0), \quad G(x) = (x-a)^n g_1(x) \ (g_1(a) \neq 0)$$

로 놓고 m, n 의 값의 대소 관계에 따라 ㉔의 값을 생각해봅시다.

우선 $m > n$, 즉 분자가 가지는 인수 $x-a$ 의 개수가 분모가 가지는 인수 $x-a$ 의 개수보다 많은 경우

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^m f_1(x)}{(x-a)^n g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^{m-n} f_1(x)}{g_1(x)}$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{m-n} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}$$

이므로 ㉔의 극한은 0으로 수렴합니다.

반면 $m < n$, 즉 분모가 가지는 인수 $x-a$ 의 개수가 분자가 가지는 인수 $x-a$ 의 개수보다 많은 경우

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^m f_1(x)}{(x-a)^n g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{(x-a)^{n-m} g_1(x)}$$

에서

$$\lim_{x \rightarrow a} (x-a)^{n-m} = 0, \quad \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}$$

이므로 ㉔의 극한은 발산합니다.

그리고 $m = n$, 즉 분자가 가지는 인수 $x-a$ 의 개수와 분모가 가지는 인수 $x-a$ 의 개수가 동일한 경우

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{(x-a)^m f_1(x)}{(x-a)^n g_1(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f_1(x)}{g_1(x)} = \frac{f_1(a)}{g_1(a)}$$

이므로 ㉔의 극한은 0이 아닌 값으로 수렴합니다.

이와 같이 극한을 해석하기 위하여 분모, 분자에 곱해진 인수의 개수를 파악하는 것이 중요합니다.

검토자: 지금까지의 논의를 개략적으로 정리하면 다음과 같습니다.

- i 분자가 가지는 인수의 개수 > 분모가 가지는 인수의 개수
→ 0으로 수렴
- ii 분자가 가지는 인수의 개수 = 분모가 가지는 인수의 개수
→ 0이 아닌 값으로 수렴
- iii 분자가 가지는 인수의 개수 < 분모가 가지는 인수의 개수
→ 발산

이를 다음 기출문제에 적용해봅시다.

21. 최고차항의 계수가 1인 두 삼차함수 $f(x)$, $g(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1) = 0$
 (나) $\lim_{x \rightarrow n} \frac{f(x)}{g(x)} = (n-1)(n-2) \quad (n = 1, 2, 3, 4)$

$g(5)$ 의 값은? [4점]

- ① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

<2015학년도 6월 평가원 A형>

조건 (나)에 주어진 등식에 $n = 1$, $n = 2$ 를 대입하면 각각

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad \dots \textcircled{\text{A}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \quad \dots \textcircled{\text{B}}$$

을 얻습니다. x 가 p 로 수렴할 때 극한값이 0이라는 것은,

분자가 가지고 있는 인수 $x - p$ 의 개수가

분모가 가지고 있는 인수 $x - p$ 의 개수보다 많다는 뜻입니다.

이때 조건 (가)에서 $g(1) = 0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x - 1$ 을 인수로 가집니다.

따라서 ㉠으로부터 함수 $f(x)$ 는 $(x - 1)^2$ 을 인수로 가져야만 합니다.

또한 ㉡에서 $f(2) = 0$ 이므로 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 를

$f(x) = (x - 1)^2(x - 2)$ 로 확정할 수 있습니다.

출제자: 올해 13번은 풀이 과정이 적혀 있어서 답을 구하는 것은 그리 어렵지 않았겠지만
답만 구하는 것에 그치지 않고 앞서 분석한 정도로는 이해를 하고 가셨으면
좋겠습니다.

원본 문항이 힌트 없이 썩으로 풀기에는 'T'스러움이 강했어서 조금 더 많은
학생들이 무리 없이 접근할 수 있으면 좋겠다는 생각은 하고 있었습니다.

마침 작년 6월 평가원 20번에서 수2 문항의 빈칸 채우기가 등장하여 이를
반영하였구요. 그 결과 이 문제를 접근하지 못하는 학생들이 많이 줄었을 것이라
생각하지만 여전히 (가)와 (다)를 채우는 것은 꽤 논리적인 사고를 요구하고 있지
않나 합니다. 풀이 과정의 맥락에 대한 이해가 어느 정도 필요하죠.